QCM

1. $f(x)=\sin(\pi x^2) \Rightarrow f'(x)=2\pi x.\cos(\pi x^2)$
2. a/ $f(-2)<f(-1)$

   b/ $y= -\frac{1}{2}x$

3. $f([1,+\infty[=[-1,+\infty[$
4. $x = 2$
5. (ζ_f) admet deux tangentes horizontales

VRAI – FAUX :

1. (VRAI) f est continue sur [-1,2] et dérivable sur]-1,2[alors d'après le théorème des accroissement fini il existe au moins un réel $c \in]-1,2[$ tel que

   $f(2) -f(-1)=f'(c)(2-(-1)) \Leftrightarrow f'(c)=-1$
2. (FAUX)

   Contre exemple : $f(x)=\sqrt{x}$ et $g(x)=x$ $h(x)= (f.g)(x)= x\sqrt{x}$

   h est dérivable en 0 mais f n'est pas dérivable à droite en 0
3. (VRAI)

   $f'(x) = 3x^2 -6x +2$ $\Delta' = 3 >0$ alors l'équation $f'(x)=0$ admet deux solutions distinctes (Rq :on pourra utiliser le th acc fini)
4. (VRAI) f est dérivable sur [2,5] et $|f'(t)| \leq 2 \ \forall t \in [2,5]$ alors d'après le th des inégalités des Accroissement finis :

$$|f(5)-f(2)| \leq 2\times(5-2) \Rightarrow |f(5)-f(2)| \leq 6$$

EXERCICE№1

1) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$; a = 2

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{\frac{x+1}{x-1}-3}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{-2(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{-2}{(x-1)} = -2$

D'où f est dérivable en 2 et $f'(2) = -2$

(T) : $y = f'(2).(x - 2) + f(2)$

(T) : $y = -2x + 7$

2) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - x$; a = 0

Comme étant fonction polynôme , f est dérivable sur IR et

$f'(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 1$; $f''(0) = -1$

(T) : $y = f'(0).(x - 0) + f(0)$

(T) : $y = -x$

3) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$; a = -3

$\lim\limits_{x \to -3} \frac{f(x)-f(-3)}{x+3} = \lim\limits_{x \to -3} \frac{\sqrt{x^2-4}-\sqrt{5}}{x+3} = \lim\limits_{x \to -3} \frac{x^2-9}{(x+3)(\sqrt{x^2-4}+\sqrt{5})}$

$= \lim\limits_{x \to -3} \frac{(x-3)}{(\sqrt{x^2-4}+\sqrt{5})} = \frac{-3}{\sqrt{5}}$ d'où f est dérivable en (-3) et $f'(-3) = \frac{-3}{\sqrt{5}}$

(T) : $y = \frac{-3}{\sqrt{5}}.(x+3) + \sqrt{5}$

(T) : $y = \frac{-3}{\sqrt{5}}.(x + \frac{4}{3})$

4) $f(x) = \sqrt{|2x+1|}$; a = -1

Pour $x \in]-\infty, -\frac{1}{2}]$; $f(x) = \sqrt{-2x-1}$

$\lim\limits_{x \to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1} \frac{\sqrt{-2x-1}-1}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1} \frac{-2(x+1)}{(x+1)(\sqrt{-2x-1}+1)}$

$= \lim\limits_{x \to -1} \frac{-2}{(\sqrt{-2x-1}+1)} = -1$ d'où f est dérivable en (-1) et $f'(-1) = -1$

(T) : $y = -1\ (x+3) + 1$

(T) : $y = -x$

EXERCICE№2

1) soit $f(x) = \sqrt{x+1}$, f est dérivable sur]-1, +∞[et $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f''(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

2) soit $f(x) = x - \sqrt{x-2}$, f est dérivable sur]2, +∞[et $f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x-\sqrt{x-2}-2}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = f'(3) = \frac{1}{2}$$

3) soit $f(x) = (x+1)^{195}$

f est dérivable sur IR et $f'(x) = 195(x+1)^{194}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x+1)^{195}-1}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = 195$$

4) soit $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2$

$f'(x) = 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x$

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = 14$$

EXERCICE№3

$f(x) = |x^2 - 4|$

x	-∞	-2	2	+∞
x^2-4	+	0	- 0	+

1) – a) * $\lim_{x \to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{|x^2-4|}{x-2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{-(x^2-4)}{x-2} = \lim_{x \to 2^-} [-(x+2)]$

$= -4 = f'_g(2)$

* $\lim_{x \to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{|x^2-4|}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(x^2-4)}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} (x+2) = 4 = f'_d(2)$

$f'_g(2) \neq f'_d(2)$ d'où f n'est pas dérivable en 2

b) $\lim_{x \to (-2)^-} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim_{x \to (-2)^-} \frac{|x^2-4|}{x+2} = \lim_{x \to (-2)^-} \frac{(x^2-4)}{x+2}$

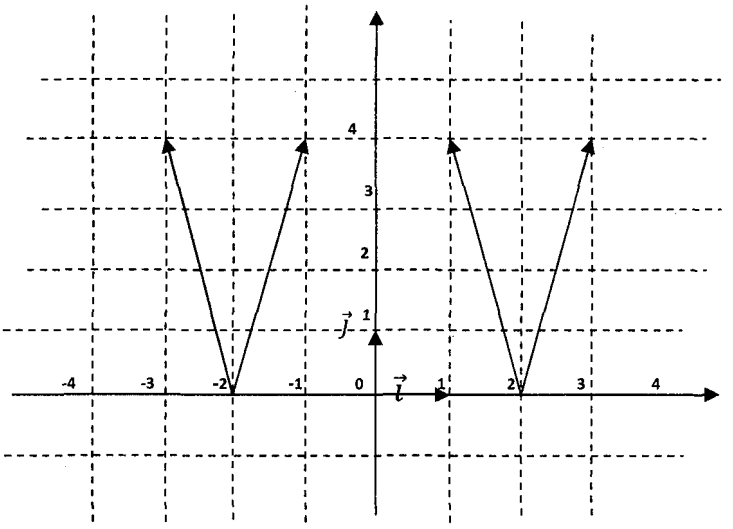
$= \lim_{x \to (-2)^-} (x-2) = -4 = f'_g(-2)$

* $\lim_{x \to (-2)^+} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim_{x \to (-2)^+} \frac{|x^2-4|}{x+2} = \lim_{x \to (-2)^+} \frac{-(x^2-4)}{x+2}$

$= \lim_{x \to (-2)^+} [-(x - 2)] = 4 = f'_d(-2)$

$f'_g(-2) \neq f'_d(-2)$ d'où f n'est pas dérivable en (-2)

2)



EXERCICE№4

Soit $f(x) = \frac{1}{x^2} \rightarrow f'(x) = \frac{-2}{x^3}$ f est dérivable en 1et f'(1)=-2

f(1)+f'(1).h est une approximation de f(1+h) Donc

1-2h est une approximation de $\frac{1}{(1+h)^2}$

*1- $2.(2.10^{-10})$=0,9999999996 est une approximation de

$$\frac{1}{(1,0000000002)^2} = \frac{1}{(1+2.10^{-10})}$$

* même travail pour $h=-2.10^{-10}$ donne

1,0000000004 est une approximation de $\frac{1}{(0,9999999998)^2}$

EXERCICE№5

1. $f(x)= 3x^{10}-\frac{5}{4}x^8+3x-10$ f est une fonction polynôme ; elle est donc dérivable sur IR et $f'(x)=30x^9-10x^7+3$

2. $f(x)=(1-x-3x^3)(x^2+2x)^3$ f est une fonction polynôme ; elle est donc dérivable sur IR et $f'(x)= (-1-9x^2)(x^2+2x)^3+3(2x+2)(x^2+2x)^2(1-x-3x^3)$

3. $f(x)=\frac{x^2}{1-x}$ Comme étant fonction rationnel f est dérivable sur D_f =IR\{1} et en particulier sur]1,+∞[et $f'(x)=\frac{2x(1-x)+x^2}{(1-x)^2}=\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}$

4. $f(x)=\frac{(x+1)^3}{x^2}$ Comme étant fonction rationnel f est dérivable sur D_f =IR* et en particulier sur [1,+∞[

$f'(x) = 1-\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}=\frac{x^3-3x-2}{x^3}$

5. les fonctions $x\mapsto \cos(3x)$ *et* $x\mapsto \sin(2x)$ sont dérivables sur IR d'où f est dérivable sur IR et

$f'(x)= -3\sin(3x)-2\cos(2x)$

6. $f(x)=\frac{\sin x}{1-\cos x}$ La fonction $x\mapsto 1-\cos x$ est dérivable et ne s'annule pas sur $]0,\pi[$ donc f est dérivable sur $]0,\pi[$ comme étant le quotient de deux fonctions dérivables et $f'(x) = \frac{-1}{1-\cos x}$

7. $f(x)= (1+\sin(2x))^3$ f est dérivable sur IR comme étant la puissance d'une fonction dérivable et $f'(x)= 6\cos(2x).[1+\sin(2x)]^2$

8. $f(x)=\tan^2(\frac{\pi}{2}x)$ la fonction u: $x\mapsto \frac{\pi}{2}x$ est dérivable sur [0,1[et $u([0,1[)= [0,\frac{\pi}{2}[$ et comme la fonction tangente est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ Alors f est dérivable sur [0,1[comme étant la composé de deux fonctions dérivables et

$f'(x)=2.tg(\frac{\pi}{2}x).[\frac{\pi}{2}.(1+\tan^2(\frac{\pi}{2}x))] = \pi.tg(\frac{\pi}{2}x).[1+\tan^2(\frac{\pi}{2}x)]$

9. $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ la fonction $x\mapsto\frac{x-1}{x+1}$ est dérivable et strictement positive sur $]1,+\infty[$ donc f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et $f'(x)= \frac{1}{(x+1).\sqrt{x^2-1}}$

10. $x\mapsto\sqrt{x}-2$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$x\mapsto\sqrt{x}+2$ est dérivable et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$

donc f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme étant le quotient de deux fonctions dérivables et

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}+2)-\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2}{\sqrt{x}.(\sqrt{x}+2)^2}$$

EXERCICE№6

f $(x) = x^3 - 3x$ $\quad g(x) = x - \frac{4}{x}$

1) $M(x,y) \in (\mathcal{C})\cap(\mathcal{C}') \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^3 - 3x \\ y = x - \frac{4}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x = x - \frac{4}{x} \\ y = x^3 - 3x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 4x + \frac{4}{x} = 0 \\ y = x^3 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 4x^2 + 4 = 0 \\ y = x^3 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - 2)^2 = 0 \\ y = x^3 - 3x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 \\ y = x^3 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases}$

D'où : $(\mathcal{C})\cap(\mathcal{C}') = \{A(-\sqrt{2}, \sqrt{2}), B(\sqrt{2}, -\sqrt{2})\}$

2) * $f'(x) = 3x^2 - 3$

$g'(x) = 1 + \frac{4}{x^2}$

* $f'(-\sqrt{2}) = g'(-\sqrt{2}) = 3$

d'où : $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ admettent la même tangente (T_A) en A

$(T_A) : y = 3(x + \sqrt{2}) + \sqrt{2}$

$(T_A) : y = 3x + 4\sqrt{2}$

* $f'(\sqrt{2}) = g'(\sqrt{2}) = 3$

$(T_B) : y = 3(x - \sqrt{2}) - \sqrt{2}$

$(T_B) : y = 3x - 4\sqrt{2}$

EXERCICE№7

1) <u>continuité en (-1)</u>

f(-1) = 0

* $\lim\limits_{x \to (-1)^-} f(x) = \lim\limits_{x \to (-1)^-} \sqrt{-x-1} = 0 = f(-1)$

* $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x) = \lim\limits_{x \to (-1)^+} (x^2 - 1) = 0 = f(-1)$

f est continue à droite et à gauche en (-1) , d'où : f est continue en (-1)

continuité en 1

f(1) = 0

* $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2 - 1) = 0 = f(1)$

* $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 2\sin(x-1) = 0 = f(1)$

f est continue à droite et à gauche en 1 , d'où : *f est continue en 1*

2) dérivabilité en (-1)

* $\lim_{x \to (-1)^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x \to (-1)^-} \frac{\sqrt{-x-1}}{x+1} = \lim_{x \to (-1)^-} \frac{-(x+1)}{(x+1)\sqrt{-x-1}}$

$= \lim_{x \to (-1)^-} \frac{-1}{\sqrt{-x-1}} = -\infty$; f n'est pas dérivable en (-1)

dérivabilité en 1

* $\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} (x+1) = 2 = f'_g(1)$

* $\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{2\sin(x-1)}{x-1}$; on pose : $X = x - 1$

$\lim_{X \to 0^+} \frac{2\sin X}{X} = 2 = f'_d(1)$

f est dérivable à droite et à gauche en 1 et $f'_g(1) = f'_d(1) = 2$, d'où : f est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$

3) * la fonction $x \mapsto -x - 1$ est dérivable et strictement positive sur]-∞,-1[

D'où : f est dérivable sur]-∞,-1[

* la fonction $x \mapsto x^2 - 1$ est dérivable sur IR , en particulier sur]-1,1[

d'où : f est dérivable sur]-1,1[

* la fonction $x \mapsto 2\sin(x-1)$ est dérivable sur IR ,

en particulier sur] 1,+∞[, d'où : f est dérivable sur] 1,+∞[.

EXERCICE№8

1) $f(x) = x^5 - 2x^3 + 3x + 4$

$f'(x) = 5x^4 - 6x^2 + 3$

$f''(x) = 20x^3 - 12x$

$f^{(3)}(x) = 60x^2 - 12$

$f^{(4)}(x) = 120x$

$f^{(5)}(x) = 120$

$f^{(n)}(x) = 0$ pour $n \geq 6$

2) $f(x) = \cos x + \sin x$

* on pose : $g(x) = \sin x$; $g'(x) = \cos x$; $g''(x) = -\sin x$

$g^{(3)}(x) = -\cos x$; $g^{(4)}(x) = \sin x$

On pourra remarquer que : $g^{(2n)}(x) = (-1)^n . \sin x$, pour $n \geq 1$

Montrons ce résultat par récurrence :

* pour $n = 1$

$g^{(2)}(x) = g''(x) = -\sin x = (-1)^1 . \sin x$ (vraie)

* supposons que : $g^{(2n)}(x) = (-1)^n . \sin x$

et montrons que : $g^{(2n+2)}(x) = (-1)^{n+1} . \sin x$

$g^{(2n)}(x) = (-1)^n . \sin x \Rightarrow g^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x.$

$\Rightarrow g^{(2n+2)}(x) = -(-1)^n \sin x \Rightarrow g^{(2n+2)}(x) = (-1)^{n+1} \sin x$

Conclusion :

$g^{(2n)}(x) = (-1)^n . \sin x$, *par suite* $g^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x.$

De même on pose : $h(x) = \cos x$

$h^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos x$

$h^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \sin x$

Conclusion :

$f^{(2n)}(x) = (-1)^n . [\cos x + \sin x]$, $f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n [\cos x - \sin x]$

3) $f(x) = \sin 2x$

$f^{(2n)}(x) = (-1)^n . 2^{2n} \sin 2x$, $f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n . 2^{2n+1} \cos 2x$

(récurrence)

4) $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$

$f'(x) = -\left[\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2}\right]$

$f''(x) = 2\left[\frac{1}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x+1)^3}\right]$

$f^{(3)}(x) = -6\left[\frac{1}{(x-1)^4} + \frac{1}{(x+1)^4}\right]$

$f^{(4)}(x) = 24\left[\frac{1}{(x-1)^5} + \frac{1}{(x+1)^5}\right]$

Remarquons que pour $n \geq 1$: $f^{(n)}(x) = (-1)^n (n!)\left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}} + \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right]$

(DEMONSTRATION PAR RECURRENCE)

EXERCICE№9

1. La fonction : $x \mapsto \sin x$ est dérivable et strictement positive sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ d'où f est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et $f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

2. La fonction : $x \mapsto \frac{\pi}{x}$ est dérivable sur [1,+∞[et comme la fonction sinus est dérivable sur IR Alors f est dérivable sur [1,+∞[et f'(x)= $\frac{-\pi}{x^2}\cos(\frac{\pi}{x})$
3. f(x)= tg(sin(x))

La fonction sinus est dérivable sur IR et $\forall x \in IR$; $\sin(x) \in [-1,1]$; comme la fonction tangente est dérivable sur [-1,1]Alors f est dérivable sur IR et

f'(x)=cos(x).[1+tg²(sin(x))]

EXERCICE№10

$f(x) = \frac{x^2-3x+6}{x-1}$

1) $f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$

$f'(x) = -3 \Leftrightarrow -3(x-1)^2 = x^2 - 2x - 3$

$\Leftrightarrow -3(x^2 - 2x + 1) = x^2 - 2x - 3 \Leftrightarrow 4x^2 - 8x = 0$

$\Leftrightarrow 4x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \ ou \ \ x = 2$

Conclusion :

Les tangentes à $(\mathcal{C}_f)$ respectivement aux points d'abscisses : 0 et 2 sont parallèles à la droite d'équation : y = -3x

2) A(0,-6) et B(2,4) $\begin{cases} (T_A): y = -3x - 6 \\ (T_B): y = -3x + 10 \end{cases}$

EXERCICE№11

$f(x) = x^3 - 3x + 2$; A(1,0) et B(2,4)

$f'(x) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 4 \Leftrightarrow x^2 = \frac{7}{3} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{7}{3}}$ car $x \in [1,2]$

Conclusion :

La tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point M_0 ($\sqrt{\frac{7}{3}}$, f($\sqrt{\frac{7}{3}}$)) est parallèle à la droite (AB)

EXERCICE№12

$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

* f est continue sur [1,2] et dérivable sur]1,2[et on a : f(1) = f(2)

D'après le théorème de ROLLE il existe un réel $\alpha_1 \in$]1,2[tel que $f'(\alpha_1) = 0$

De même il existe un réel $\alpha_2 \in$]2,3[tel que $f'(\alpha_2) = 0$

Et il existe un réel $\alpha_3 \in$]3,4[tel que $f'(\alpha_3) = 0$

Conclusion :

α_1 , α_2 et α_3 sont trois zéros distinctes de f'.

EXERCICE№13

$f(x) = \tan x$

1) $f'(x) = 1 + \tan^2 x > 0$

$0 \le x \le \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan 0 \le \tan x \le \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$ car la fonction tan est croissante sur $[0, \frac{\pi}{4}]$

$\Rightarrow 0 \le \tan x \le 1 \Rightarrow 0 \le \tan^2 x \le 1 \Rightarrow 1 \le 1 + \tan^2 x \le 2$

$\Rightarrow 1 \le f'(x) \le 2$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$

2) pour $t \in [0, x]$: $1 \le f'(x) \le 2$

D'après le théorème des inégalités des accroissements finis.

$1(x - 0) \le f(x) - f(0) \le 2(x - 0)$

$\Rightarrow x \le \tan x \le 2x$

EXERCICE№14

Soit $f(t) = \sqrt{1 + t}$

f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{1+t}}$

$0 \le f'(x) \le \frac{1}{2}$ pour $t \in [0, x]$ d'où : $0 \le f(x) - f(0) \le \frac{1}{2}x$

Par suite : : $0 \le \sqrt{1 + x} - 1 \le \frac{1}{2}x$

2) d'après la 1ère) question : : $0 \le \sqrt{1 + u} - 1 \le \frac{1}{2}u$ pour $u \ge 0$

Pour $u = \frac{1}{x^2}$ on aura : $0 \le \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1 \le \frac{1}{2x^2}$

$\Rightarrow 1 \le \frac{1}{x}\sqrt{1 + x^2} - 1 \le 1 + \frac{1}{2x^2} \Rightarrow x \le \sqrt{1 + x^2} - 1 \le x + \frac{1}{2x}$ car $x > 0$

EXERCICE№15

a) soit $f(t) = \sin t$; f est dérivable sur IR et $f'(t) = \cos t$

$|f'(t)| \le 1$ d'où : $|f(x) - f(0)| \le 1|x - 0|$

$\Rightarrow |f(x)| \le |x| \Rightarrow |\sin x| \le |x|$

b) soit $f(t) = \tan t$; f est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et $f'(t) = 1 + \tan^2 t \ge 1$

pour tout $t \in [0, x]$ d'où : $f(x) - f(0) \ge 1(x - 0) \Rightarrow \tan x \ge x$

c) soit $f(t) = \cos t$; f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $f'(t) = -\sin t$

pour $t \in [0, x]$: $-1 \le f'(x) \le 1$ d'où : $-x \le f(x) - f(0) \le x$

$\Rightarrow -x \le \cos x - 1 \le x \Rightarrow 1 - x \le \cos x \le x + 1$

EXERCICE№16

$f(x) = (x - 1)\sqrt{1 - x}$

1) $D_f =]-\infty, 1]$

2) $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \sqrt{1 - x} = 0$

f est dérivable à gauche en 1 et $f'_g(1) = 0$

interprétation graphique:

$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente horizontale au point d'abscisse 1.

3) f est dérivable sur]-∞,1 [et $f'(x) = \sqrt{1-x} + (x-1).(\frac{-1}{2\sqrt{1-x}})$

$f'(x) = \sqrt{1-x} + (\frac{\sqrt{1-x}}{2}) = \frac{3}{2}\sqrt{1-x} \geq 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

x	-∞		1
$f'(x)$		+	
$f(x)$	-∞	↗	0

EXERCICE№17

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

1) la fonction $x \longmapsto x+1$ est dérivable et strictement positive sur IR_+

D'où f est dérivable sur IR_+

$f'(x) = \frac{-1}{2(\sqrt{x+1})^3}$ et $|f'(x)| = \frac{1}{2(\sqrt{x+1})^3}$

$x \geq 0 \Rightarrow x+1 \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x+1} \geq 1 \Rightarrow (\sqrt{x+1})^3 \geq 1$

$\Rightarrow 2(\sqrt{x+1})^3 \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{2(\sqrt{x+1})^3} \leq \frac{1}{2}$ d'où : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

2) f est dérivable sur [0,+∞ [et $|f'(t)| \leq \frac{1}{2}$ pour tout $t \in IR_+$

D'après le théorème des inégalités des accroissements finis

$|f(x) - f(0)| \leq \frac{1}{2}|x-0| \Rightarrow |f(x)-1| \leq \frac{1}{2}x$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}x \leq f(x) - 1 \leq \frac{1}{2}x \Rightarrow 1 - \frac{1}{2}x \leq f(x) \leq \frac{1}{2}x + 1$

D'où : $1 - \frac{x}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x}} \leq \frac{x}{2} + 1$

3) $1 - \frac{10^{-11}}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{1+10^{-11}}} \leq \frac{10^{-11}}{2} + 1$

EXERCICE№18

$f(x) = x^3 - x$

1) f est dérivable sur IR et $f'(x) = 3x^2 - 1$

x	-∞		$\frac{-1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		+∞
$f'(x)$	+		0	-	0	+	
$f(x)$	-∞	↗	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	↘	$\frac{-2}{3\sqrt{3}}$	↗	+∞

2) – a)

$\underbrace{0{,}577350268}_{b} < \underbrace{0{,}577350269}_{a}$

$a, b \in [\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ f est strictement décroissante sur $[\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$

d'où : $f(b) > f(a) \Rightarrow B > A$

b) $a = 0{,}577350271$; $b = 0{,}577350272$

$A = f(a)$ et $B = f(b)$

$a < b$ et $a, b \in [\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty[$ f est strictement croissante sur $[\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty[$

d'où : $f(a) < f(b) \Rightarrow A < B$

EXERCICE№19

1) $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$

f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}}$

$f'(x) = \frac{-2}{2\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1})} < 0 \; ; \; \forall x \in]1, +\infty[$

x	1		$+\infty$
$f'(x)$		-	
$f(x)$	$\sqrt{2}$	↘	0

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = 0$

Rq : f n'est pas dérivable à droite en 1

2) $g(x) = \cos x - \sin x$; $I = [0, \pi]$

g est dérivable sur $[0, \pi]$ et $g'(x) = -\sin x - \cos x = -[\cos x + \sin x]$

$\begin{cases} g'(x) = 0 \\ x \in [0, \pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -\sin x \\ x \in [0, \pi] \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4}$

x	0		$\frac{3\pi}{4}$		π
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	1	↘	$-\sqrt{2}$	↗	-1

3) $h(x) = \cos(\sin x)$

$h'(x) = \cos x \,.\, \cos'(\sin x) = -\cos x \,.\, \sin(\sin x)$

le signe de $h'(x)$ est celui de $(-\cos x)$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$h'(x)$		-	0	+	
$h(x)$	1	↘	$\cos 1$	↗	1

EXERCICE№20

$$f(x) = \begin{cases} 4\sqrt{x+1} & si \;\; x \geq 3 \\ x^2 - 5x + c & si \;\; x < 3 \end{cases}$$

1) – a) $f(3) = 8$

f est continue à gauche en 3 si et seulement si : $\lim\limits_{x \to 3^-} (x^2 - 5x + c) = f(3)$

$\Leftrightarrow$ -6 + c = 8 $\Leftrightarrow$ c = 14 d'où : $f(x) = \begin{cases} 4\sqrt{x+1} & si \;\; x \geq 3 \\ x^2 - 5x + 14 & si \;\; x < 3 \end{cases}$

b) f est dérivable sur chacun des intervalles]-∞,3[et]3,+∞[

<u>* dérivabilité en 3 :</u>

* $\lim\limits_{x \to 3^-} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3^-} \frac{x^2-5x+6}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3^-} \frac{(x-3)(x-2)}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3^-} (x-2) = 1$

D'où : f est dérivable à gauche en 3 et $f_g'(3) = 1$

* $\lim\limits_{x \to 3^+} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3^+} \frac{4\sqrt{x+1}-8}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3^+} \frac{4(\sqrt{x+1}-2)}{x-3}$

$= \lim\limits_{x \to 3^+} \frac{4[(x+1)-4]}{(x-3)[(\sqrt{x+1})+2]} = \lim\limits_{x \to 3^+} \frac{4}{\sqrt{x+1}+2} = 1$

D'où : f est dérivable à droite en 3 et $f_d'(3) = 1 = f_g'(3)$

D'où : f est dérivable en 3 ;

<u>conclusion :</u> f est dérivable sur IR

c) $f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{x+1}} & si \;\; x \geq 3 \\ 2x - 5 & si \;\; x < 3 \end{cases}$

2) * pour $x \in]3,+\infty[$; $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x+1}}$

* pour $x \in]-\infty,3[$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{31}{4}$	↗	$+\infty$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 4\sqrt{x+1} = +\infty$
* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

3) f admet $\frac{31}{4}$ comme minimum absolu en $\frac{5}{2}$

EXERCICE№21

$f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

1)

x	-∞		-1		1		+∞
$1-x^2$		-	0	+	0	-	

$D_f = [-1,1]$

2) $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x\sqrt{1-x^2}}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x(1-x^2)}{(x-1)\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x(1+x)(1-x)}{(x-1)\sqrt{1-x^2}}$

$= \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{-x(x+1)}{\sqrt{1-x^2}} = -\infty$ (de la forme $\frac{-2}{0^+}$)

f n'est pas dérivable à gauche en 1

$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 1.

3) – a) pour $x \in D_f = [-1,1]$, on a $(-x) \in D_f$

$f(-x) = -x\sqrt{1-(-x)^2} = -x\sqrt{1-x^2} = -f(x)$ d'où : f est impaire.

b) f n'est pas dérivable à droite en (-1) (f est impaire)

pour $x \in]-1,1[$; $f'(x) = \sqrt{1-x^2} + x\left(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)$

$f'(x) = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ le signe de $f'(x)$ est celui de $(1-2x^2)$

x	-1		$\frac{-1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	0	↘	$\frac{-1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0

c) * f admet $(-\frac{1}{2})$ comme minimum absolue en $(-\frac{1}{\sqrt{2}})$

* f admet $(\frac{1}{2})$ comme maximum absolue en $(\frac{1}{\sqrt{2}})$

4) – a) T : $y = f'(0).(x-0) + f(0)$

(T) : $y = x$

b) $f'(x) = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$; $f''(x) = \frac{x(2x^2-3)}{(\sqrt{1-x^2})^3}$

x	-1		0		1
$f''(x)$		+	0	-	

f'' s'annule en 0 en changeant de signe d'où le point de coordonnées (0,f(0)) est un point d'inflexion pour $(\mathcal{C}_f)$;

f(0) = 0 , d'où O(0,0) est un point d'inflexion pour $(\mathcal{C}_f)$.

EXERCICE№22

$f(x) = x\sqrt{x} - \frac{3}{16}x^2$; $x \geq 0$

1) f est dérivable]0,+∞[comme étant produit et somme de fonction dérivables.

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^+} (\sqrt{x} - \frac{3}{16}x) = 0$, d'où f est dérivable à droite en 0

Par suite f est dérivable sur [0,+∞[.

Pour $x \in]0,+\infty[$; $f'(x) = \sqrt{x} + x(\frac{1}{2\sqrt{x}}) - \frac{3}{8}x = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{3}{8}x$

$= \frac{3\sqrt{x}}{2} - \frac{3}{8}x = \frac{12\sqrt{x}-3x}{8}$

Pour $x = 0$; $\frac{12\sqrt{0}+30}{8} = 0 = f'_d(0)$

Conclusion : Pour $x \in [0,+\infty[$; $f'(x) = \frac{12\sqrt{x}-3x}{8}$

b) $f'(x) = \frac{3\sqrt{x}}{8}[4 - \sqrt{x}]$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 16$

x	0		16		+∞
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗	16	↘	-∞

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\sqrt{x}\left[1 - \frac{3}{16}\sqrt{x}\right] = -\infty$

c) l'équation $f(x) = 20$ n'admet pas de solution dans [0,+∞[

($f(x) \leq 16$, $\forall x \in [0,+\infty[$)

2) – a) f est dérivable sur]0,+∞[et $f'(x) = \frac{12\sqrt{x}-3x}{8}$

f'est dérivable sur]0,+∞[; ($x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur]0,+∞[)

d'où ; f est deux fois dérivable sur]0,+∞[

b) $f''(x) = \frac{12\frac{1}{2\sqrt{x}}-3}{8} = \frac{1}{8}\left[\frac{6}{\sqrt{x}} - 3\right] = \frac{3}{8}\left[\frac{2}{\sqrt{x}} - 1\right]$

$= \frac{3}{8}\left(\frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right) = \frac{3}{8}\left(\frac{4-x}{\sqrt{x}(2+\sqrt{x})}\right)$

Le signe de $f''(x)$ est celle de $(4 - x)$

x	-1		4		1
$f''(x)$	|	+	0	-	

f'' s'annule en 4 en changeant de signe d'où le point I(4, f(4)) est un point d'inflexion pour $(\mathcal{C})$; I(4,5).

EXERCICE№23

$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

1) $D_f = [0,+\infty[$

2) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x^2}} = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}}} = +\infty$

f n'est pas dérivable à droite en 0

interprétation graphique :

$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées au point d'abscisse 0.

3) – a) la fonction : $x \longmapsto x + \sqrt{x}$ est dérivable sur]0,+∞[et strictement positive

D'où : f est dérivable sur]0,+∞[

$f'(x) = \frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}.\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

b) $f'(x) > 0$; $\forall x \in]0,+\infty[$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	|	+	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$

EXERCICE№24

$f(x) = \frac{1}{2}(4 + \sin x)$

1) $f'(x) = \frac{1}{2}\cos x$

On a : $|\cos x| \leq 1 \Longrightarrow |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

2) – a) $g(x) = f(x) - x$; $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$, car $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

D'où : g est strictement décroissante sur IR.

b) pour tout $x \in$ IR , on a : $-1 \leq \sin x \leq 1$

$\Longrightarrow 3 \leq 4 + \sin x \leq 5 \Longrightarrow \frac{3}{2} \leq \frac{1}{2}(4 + \sin x) \leq \frac{5}{2}$

$\Longrightarrow \frac{3}{2} \leq f(x) \leq \frac{5}{2} \Longrightarrow \frac{3}{2} - x \leq \frac{1}{2} f(x) - x \leq \frac{5}{2} - x$

$\Longrightarrow \frac{3}{2} - x \leq g(x) \leq \frac{5}{2} - x$

c) $g(x) \leq \frac{5}{2} - x$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{5}{2} - x\right) = -\infty$, d'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

* $g(x) \geq \frac{3}{2} - x$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{3}{2} - x\right) = +\infty$, d'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$

D'où : g est continue et strictement décroissante sur IR ;

d'où : $g(IR) =]\lim\limits_{x \to +\infty} g, \lim\limits_{x \to -\infty} g\ [=]-\infty, +\infty\ [$

$g(IR) = IR$

d) $0 \in g(IR)$ d'où il existe un réel a tel que $g(a) = 0$

comme g est strictement décroissante alors a est unique.

Par suite il existe un unique réel a tel que $f(a) = a$

$g(\frac{2\pi}{3}).g(\frac{5\pi}{6}) < 0 \Rightarrow \frac{2\pi}{3} < a < \frac{5\pi}{6}$

3) $\begin{cases} U_0 \quad donné \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) f est dérivable sur IR et $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

d'après le théorème des inégalités des accroissements finis :

$|f(U_n) - f(a)| \leq \frac{1}{2}|U_n - a|$ d'où : $|U_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2}|U_n - a|$

b) démonstration par récurrence :

* $|U_0 - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |U_0 - a|$ (vraie)

* supposons que : $|U_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - a|$

et montrons que : $|U_{n+1} - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |U_0 - a|$

on a : $|U_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - a|$ et $|U_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2}|U_n - a|$

d'où : $|U_{n+1} - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |U_0 - a|$

<u>conclusion :</u>

$|U_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - a|$ pour tout $n \in IN$

c) $|U_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - a|$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - a| = 0$; d'où :

$\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n - a) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = a.$